22 30

23 нови – матем. кайф студенски изпити

по край на април

ВА контролно 3.04

$\forall p$ $G \geq H$ (кр гр), $|G| = |H|[G:H]$

Лема

Нуер

Мат. индукция

Ако G е гр, H е ПР ($H \leq G$) на G то $L_g : H \to gH$, $L_g(h) = gh$ е взаимно еднозначно, изображение за произволно $g \in G$. Аналогично $R_g : H \to Hg$, $R_g(h) = hg$ за $\forall h \in H$ е взаимно еднозначно изобр-е. В сила е: ако H е крайна ПГ на G, то броя на елементите $|H| = |gH| = |Hg|$ за $\forall g \in G$

Док

Ако $gh_1 = L_g(h_1) = L_g(h_2) = gh_2$ за $h_1, h_2 \in H$ то последно уравнение е g^{-1} дава $h_1 = g^{-1}(gh_1) = g^{-1}(gh_2) = h_2$ следователно за $h_1, h_2 \in H$, $h_1 \neq h_2$, гилаче $L_g(h_1) \neq L_g(h_2)$ всеки елемент на gH е от вида $gh = L_g(h)$, т.е. $L_g : H \to gH$ е взаимно еднозначно

Лема

Ако G е крайна гр а H е ПГ на G, то съответствието $gH \mapsto Hg^{-1}$ за произволно $g \in G$ е взаимно еднозначно изображение на множеството на левите съседни класове на G относно H върху множеството на десните съседни класове на G относно H. Броят на левите и десните съседни класове на G относно H се

Броят на десните съседни класове на H в G е равен на броя на левите съседни класове и се бележи с $[G:H]$

Доказателство

Ако $Hg_1^{-1} = Hg_2^{-1}$, то $g_1^{-1}g_2 \in H$, откъдето $g_1H = g_2H$. Следователно от $g_1H \neq g_2H$ следва $Hg_1^{-1} \neq Hg_2^{-1}$. Всеки десен съседен клас Hg^{-1} е образ на левия съседен клас $g^{-1}H$ съгласно $(g^{-1})^{-1} = g$. □

Теорема на Лагранж

Ако G е крайна гр, а H е ПГ на G то $|G| = |H| \cdot [G:H]$

Доказателство

Ако $k = [G:H]$ то G е непресичащото се обединение на H т.е. $G = H \cup g_2H \cup \dots g_kH$

Отчитайки твърдението $|G| = |H| + |g_2H| + \dots |g_kH|$ и $k|H| = [G:H]|H|$ □

Сл1 Ако G е крайна гр то редът $|H|$ на произволната ПГ H на G дели реда $|G|$ на G

Сл2 Ако G е крайна гр то редът на произволен елемент $g \in G$ дели реда $|G|$ на G

Док

Редът на $g \in G$ съвпада с реда на цикличната подгрупа $\langle g \rangle = \{g^m \mid m \in \mathbb{Z}\}$ породена от g

Сл3 Всяка крайна група G от прост ред p е циклична

Док

Редът на произволен елемент $g \in G$, $g \neq e$ е делител на реда $|G| = p$, но g не е равен на 1, следователно g е от ред p, $|\langle g \rangle| = p$, т.е. $\langle g \rangle = G$

Комбинаторни правила ?

Симетрична група

Симетричната група S_n се състои от всичките биективни изображения $\sigma : \{1 \dots n\} \to \{1, \dots, n\}$ наречени още перестановки. Умножението е последователното изпълнение

Деф

Нека $i_1 \dots i_k \in \{1 \dots n\}$ са к различни числа. Пермутацията $(i_1 \dots i_k)$, която оставя на място числата $\in \{1 \dots n\} \setminus \{i_1, \dots i_k\}$ и транспортира $i_s \mapsto i_{s+1}$ за $1 \le s \le k-1$, а $i_k \mapsto i_1$, се нарича цикъл с дължина к

цикъл $(i_1 \dots i_k)$ $i_{s \pmod k} = i_{s+1 \pmod k}$

Ред на $(i_1 \dots i_k)$ = на ~~реда на~~ (дължината) на този цикъл

Твърдение $(i_1 \dots i_k)^k i_{s \pmod k} =$
$(i_1 \dots i_k)^{k-1} i_{s+1 \pmod k} = \dots = i_{s+k \pmod k} = i_{s \pmod k}$
$(i_1 \dots i_k)^k = \varepsilon \Rightarrow (i_1 \dots i_k)^k = \varepsilon$

За $\forall r \in \mathbb{N}^+ < k$ имаме
$(i_1 \dots i_k)^r i_s = i_{s+r \pmod k} \neq i_{s \pmod k}$
- така че $(i_1 \dots i_k)^r \neq \varepsilon$ за никое r
естествено с $r = 0$ $(i_1 \dots i_k)^0 = \varepsilon$

Деф

Ако $\{i_1, i_k\} \cap \{j_1, \dots j_k\} = \emptyset$, казваме че цикълите $(i_1 \dots i_k)$ и $(j_1 \dots j_k)$ са независими

За независими цикли е в сила
$(j_1 \dots j_k)(i_1 \dots i_k) = (i_1 \dots i_k)(j_1 \dots j_k)$

$i_1 \dots i_k \dots j_1 \dots j_e$ / Независимите цикли комутират
$i_1 \dots i_k i_1 \dots j_e \dots j_1$

0878547889
Павел

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 6 & 5 & 7 & 1 & 2 & 4 & 8 \end{pmatrix} = (1,3,5)(2,6)(4,7)(8)$$

Нечетна

Теорема
Всяка перестановка $\sigma \in S_n \setminus \{\varepsilon\}$ а разлага единствено с точност до реда на множителите в произведение на независими цикли

Док
Нио $\sigma \in S_n \setminus \{\varepsilon\}$, $\exists\, i_1 \in \{1..n\}$ с $\sigma(i_1) = i_2 \neq i_1$
$\sigma(i_1) = i_2 \neq i_1 \Rightarrow \sigma(i_2) \in \{i_1, i_2\} \Rightarrow \sigma(i_2) = i_1, (i_1, i_2)$
$\Rightarrow \sigma(i_2) \in i_3 \notin \{i_1, i_2\}$

$\sigma(i_3) = \{i_1 i_2 i_3\} = (i_1 i_2 i_3)$ $\quad \sigma(i_3) = i_4 \notin \{i_1 i_2 i_3\}$ — ТН

с краен брой т.е.

Числата от 1 до n са краен брой т.е. след краен брой стъпки в редицата $i_1, i_2 \ldots$ настъпва повторение. Нека $\sigma(i_{k-1}) = i_k \notin \{i_1, \ldots, i_{k-1}\}$ и $\sigma(i_k) \in \{i_1 \ldots i_k\}$. Съгласно $i_{j+1} = \sigma(i_j)$ за $\forall\, 1 \leq j \leq k-1$ и вземаме σ на σ имаме $\sigma(i_k) = i_1$ съществуващо на σ в/у множ-вото $i_1 \ldots i_k$ съвпада с дей-ето на цикъла $(i_1 \ldots i_k)$. Продължаваме процеса на независими цикли представящи дей-то на σ в/у числата от 1 до n $\neq i_1 \ldots i_k$ $\{1, \ldots, n\} / \{i_1 \ldots i_k\}$ - това доказва съществуването на разлагане $\sigma = (i_1 \ldots i_k)(j_1 \ldots j_e)(p_1 \ldots p_q) \ldots$ в произв-е от независими цикли

Единственост

Нека $\xi_k = \xi_2 \xi_1 = \eta_e \dots \eta_2 \eta_1$ са всеки разложения на ξ в произведение на неразложими числа ξ_i, съответно η_j без ограничение $k \le l$. Ако $\xi_k = (a_1 \dots a_p)$ то $\exists \eta_i = (a_2 a_3 \dots a_p)$ поради независимостта на числата в разложението $\zeta = \eta_e \dots \xi_1$

Сега чрез ум-е на ξ_k^{-1} имаме $\xi_{k-1} \dots \xi_1 = \xi_k^{-1} \eta_e \dots \eta_i \dots \eta_1 = \eta_e \dots \xi_1$ с индукция по $k \Rightarrow$ равенство $k-1 = e-1$ и $\xi_I = \eta_I$ следователно индукцията на числата ξ_s и η_s

Ако $\zeta = (k_1 \dots k_e) = (j_1 \dots j_q)(i_1 \dots i_p)$ е разложението на ζ в произведение на НЧ-ма то редът на ζ е НОК и на дължините на участващите в разложението числа

Док

Ако ζ е от ред s, то $\zeta^s = (k_1 \dots k_e)^s = (j_1 \dots j_q)^s (i_1 \dots i_p)^s$

тогава изображението на НЧ-ми Пак от Независ-ста на числата с разложението имаме $(i_1 \dots i_p)^s = \varepsilon$ $(j_1 \dots j_q)^s = \varepsilon, \dots, (k_1 \dots k_e)^s = \varepsilon$

Сега редът p на $(i_1 \dots i_p)$ дели s p дели s и т. н., s е общо кратно на дължините $p, q \dots e$ на участващите в разложението числа и НОК m/s от др страна $\zeta^m = (k_1 \dots k_e)^m (j_1 \dots j_q)^m (i_1 \dots i_p)^m = \varepsilon$ защото p дели m, q дели m ... e дели m

Сега дефинираме $\leq$ на $\mathbb{N}$ редицата за $m, n \in \mathbb{N}$, $m \mid n$, n пъти следва $m = n$

Пр -

$\sigma = (1,2,3)(4,6)(5,7,8,9) \in$ отр 12

Лема

За произволна пермутация $\sigma \in S_n$ е в сила $\sigma(i_1 \dots i_k)\sigma^{-1} = (\sigma(i_1), \dots \sigma(i_k))$

Док

Ind $\forall k \leq s \leq n$ дължина цикъла отдясно е точно k

$\sigma(i_1, \dots i_k)\sigma^{-1}\sigma(i_{s \pmod k}) = \sigma(i_1, \dots i_k)(i_{s \pmod k}) = \sigma(i_{s+1 \pmod k}) = (\sigma(i_1), \dots \sigma(i_k))\sigma(i_{s \pmod k})$. За $\forall j \in \{1, \dots n\} \setminus \{\sigma(i_1), \dots \sigma(i_k)\}$

$\sigma^{-1}(j) \notin \{i_1, \dots i_k\} \Rightarrow \sigma(i_1 \dots i_k)\sigma^{-1}(j) = \sigma\sigma^{-1}(j) = j = (\sigma(i_1), \dots \sigma(i_s))(j)$ □

Пр

$(2,3)(1,2)(23)^{-1} = ((23)(1), (23)(2)) = (1,3)$

Деф

Пермутациите $\sigma, \tau \in S_n$ имат еднакъв цикличен строеж ако в разлагането им в произв-е на независими цикли участват еднакъв брой множители с една и съща дължина

Пр-и

Ако $\sigma = (135)(246)(78)$

$\tau = (12)(34)(578)$, то

$\sigma = (18)(234)(567)$

τ, σ имат еднакъв цикличен строеж

а τ и γ не са еднакви ЦСтр

Тв

Перманентите $\tau, \gamma \in S_n$ са спрегнати т.е. $\gamma = \xi \tau \xi^{-1}$ за някое $\xi \in S_n$ $\Leftrightarrow$ τ и γ имат еднакви ЦСтр

$\Rightarrow$ Док

Нко $\tau = (i_1 \dots i_{k_1})(j_1 \dots j_{k_2}) \dots (l_1 \dots l_{k_p})$ е разлагането на τ в произведение на НЦ тр за $\forall \xi \in S_n$ имаме

$\xi \tau \xi^{-1} = [\xi (i_1 \dots i_{k_1}) \xi^{-1}] \dots [\xi (l_1 \dots l_{k_p}) \xi^{-1}] =$

$(\xi(i_1) \dots \xi(i_{k_1})) \dots (\xi(l_1) \dots \xi(l_{k_p}))$ следователно τ и $\xi \tau \xi^{-1}$ имат еднакъв ЦСтр оси

Нека

$\tau = (i_1 \dots i_{k_1}) \dots (l_1 \dots l_{k_p})$ и $\gamma = (i_1' \dots i_{k_1}') \dots (l_1' \dots l_{k_p}')$ имат еднакъв ЦСтр оси. Избираме перманентния $\xi \in S_n =$

$$\begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_{k_1} & \dots & l_1 & \dots & l_{k_p} & \dots \\ i_1' & \dots & i_{k_1}' & \dots & l_1' & \dots & l_{k_p}' & \dots \end{pmatrix}$$

Тогава $\xi \tau \xi^{-1} = (i_1' \dots i_{k_1}') \dots (l_1' \dots l_{k_p}')$ са спрегнати ?

$$\frac{4x^2}{x^2+1} - 2(y+xz) + \frac{3+y(2+x)}{y^2+4}$$

$$\frac{x+y}{} - \frac{x^2+y}{2} + 2\rho$$

$$\frac{(x+y)/z}{} - \frac{z(x^{**}+y)/(z^{**}z)}{} + 2\rho$$